0.1 Funkcionály reprezentované integrálem

Jde o funkcionály ve tvaru

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \tag{1}$$

definované na množině

$$M = \{y \in C^1([a,b]) :\ y(a) = A,\ y(b) = B\}, \tag{2}$$

kde $a, b, A, B \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$.

Tuto obecnou situaci si ovšem upravíme na speciální úlohu

$$\Phi(u) = F(u + \varphi),$$

kde $\varphi(x) = \dfrac{B-A}{b-a}(x-a) + A$, a

$$X = \{u \in C^1([a,b]) :\ u(a) = u(b) = 0\}.$$

Je snadné si rozmyslet, že $u \in X$ právě tehdy, když $u + \varphi \in M$, a že $u \in X$ je extrémem funkcionálu Φ právě tehdy, když $u + \varphi$ je extrémem (stejného typu) funkcionálu F.

Výhodou této formulace je, že X je lineární prostor. Vybavíme-li ho normou

$$||u||_X = ||u||_\infty + ||u'||_\infty,$$

dostaneme normovaný lineární prostor (dokonce úplný, tedy Banachův).

Poznámky a příklady. *1. Například pro funkce $f(x,y,z)$ ve tvaru $x^2 z$, $\sqrt{1+z^2}$ a $y\sqrt{1+z^2}$ bychom dostali funkcionáy F po řadě*

$$F(y) = \int_a^b x^2 y, \quad F(y) = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2} \quad a \quad F(y) = \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}.$$

2. (výpočet $D_h\Phi$ a $d^2_{h,h}\Phi$) snadno spočítáme, že pro $U \in X$ a $h \in X \setminus \{0\}$ platí (při značení $y = u + \varphi$)

$$D_h\Phi(u) = \int_a^b f_y(x,y,y')h + f_z(x,y,y')h'\, dx$$

a

$$d^2_{h,h}\Phi(u) = \int_a^b f_{yy}(x,y,y')h^2 + 2f_{yz}(x,y,y')hh' + f_{zz}(x,y,y')(h')^2\, dx.$$

Lemma 1 (základní lemma variačního počtu)**.** *Nechť $f \in C([a,b])$. Potom*

1. pokud platí

$$\int_a^b fg' = 0, \quad g \in C^1([a,b]),\ g(a) = g(b) = 0,$$

potom f je konstantní na $[a,b]$,

2. pokud platí

$$\int_a^b fg = 0, \quad g \in C^1([a,b]),\ g(a) = g(b) = 0,$$

potom $f = 0$ na $[a,b]$.

Věta 2 (Euler-Lagrangeova rovnice)**.** *Nechť $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ a y je stacionárním bodem funkcionálu F. Potom je funkce*

$$x \mapsto f_z(x, y(x), y'(x))$$

spojitě diferencovatelná na $[a,b]$ a platí (tzv. ***Euler-Lagrangeova rovnice****)*

$$f_y(x, y(x), y'(x)) - (f_z(x, y(x), y'(x)))' = 0, x \in [a,b]. \tag{3}$$

Poznámky a příklady. *1. (regularita minimizéru) pokud je y stacionárním bodem F a pro nějaké $\xi \in (a,b)$ platí*

$$f_{zz}(\xi, y(\xi), y'(\xi)) \neq 0.$$